

Aktuarska matematika

PMF, Podgorica

Zimski semestar 2019-20

Treća nedjelja

Očekivanje i cijena

Očekivana dobit

- ▶ X – s.v. koja opisuje vrijednost nekog ugovora/igre
- ▶ $E[X]$ – je "prosječni dobitak"
- ▶ Primjer: $P(X = 2) = P(X = 0) = 0.5$, $E[X] = 1$
- ▶ $E[X]$ – je fer cijena ugovora (fair price)
 - ▶ Cijena manja od $E[X]$ je povoljna za kupca
 - ▶ Cijena veća od $E[X]$ je nepovoljna za kupca
- ▶ Prosječna dobit je $E[X - E[X]] = 0$
- ▶ Problemi? Paradoksi?
- ▶ Bezrizična procjena; cijena rizika
- ▶ St. Petersburg paradox
- ▶ Funkcije korisnosti (utility functions) – $E[u(X)]$

Očekivanje i cijena

Očekivana sadašnja vrijednost

Ako se X realizuje u budućnosti (npr. za godinu dana) onda je fair cijena danas $E[vX]$

Neto jednokratna premija, miza

- ▶ Novčana svota koju osiguranik plaća za ugovor o osiguranju je *premija*
- ▶ U praksi se premija često plaća (više puta) godišnje
- ▶ *Jednokratna premija* se plaća jednom u trenutku sklapanja ugovora
- ▶ *Neto jednokratna premija (ili miza)* je fer cijena ugovora.
 - ▶ Ugovor o osiguranju je slučajna veličina
 - ▶ Očekivana sadašnja vrijednost ugovora je miza
 - ▶ Interpretacija?

Jednostavni tipovi osiguranja

Tipovi osiguranja

- ▶ Osiguranje života
(Osiguranje kapitala za slučaj smrti)
- ▶ Osiguranje života na n godina
(Privremeno osiguranje kapitala za slučaj smrti)
- ▶ Osiguranje doživljenja
(Osiguranje kapitala za slučaj doživljenja)
- ▶ Mješovito osiguranje
- ▶ Odloženo osiguranje
- ▶ ...

Pretpostavka konstantne kamatne stope

- ▶ Kamatna stopa $i = \text{const.}$
- ▶ Faktor diskontovanja $v = \frac{1}{1+i}$
- ▶ Očekivana sadašnja vrijednost

Oznake

Međunarodne aktuarske oznake

$$A_x, \quad A_{x:\overline{n}|}^1, \quad A_{x:\overline{n}|}^{\overline{1}}, \dots$$

Oznake za potrebe kursa

$$Z_{\infty}^q, \quad Z_n^q, \quad Z_n^p, \quad Z_n, \dots$$

Osiguranje života

Whole life insurance

Neograničeno osiguranje života

Vrijednost 1 se isplaćuje na kraju godine smrti

$$Z_{\infty}^q = v^{K+1} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \mathbb{1}_{K=k}$$

Neto jednokratna premija, miza

$$\begin{aligned} A_x &:= E[Z_{\infty}^q] = E[v^{K+1}] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} P(K = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} \end{aligned}$$

Osiguranje života

Disperzija

$$\text{Var}[Z_{\infty}^q] = E[(Z_{\infty}^q)^2] - E[Z_{\infty}^q]^2$$

"Računski ekvivalentno" sa A_x :

$$E[(Z_{\infty}^q)^2] = E[(v^{K+1})^2] == E[(v^2)^{K+1}]$$

Intermezzo/podsjetnik

X_1, X_2, \dots niz slučajnih veličina

Kada je $E \left[\sum_{n=1}^{\infty} X_n \right] = \sum_{n=1}^{\infty} E[X_n]$?

Intermezzo/podsjetnik

X_1, X_2, \dots niz slučajnih veličina

Kada je $E \left[\sum_{n=1}^{\infty} X_n \right] = \sum_{n=1}^{\infty} E[X_n]$?

- ▶ Fubini?
- ▶ $S_n = X_1 + \dots + X_n$
- ▶ $S_n \rightarrow S$ (pointwise)
- ▶ Teorema o monotonoj konvergenciji
 - ▶ S_n monotono neopadajući niz (pointwise)
- ▶ Teorema o dominantnoj konvergenciji
 - ▶ Postoji apsolutno integrabilna s.v. S' tako da je : $|S_n| < S'$

Osiguranje života na n godina

Term insurance of duration n

Vrijednost 1 se isplaćuje na kraju godine smrti
ako se smrt dogodi u prvih n godina

$$Z_n^q = \begin{cases} v^{K+1}, & K < n \\ 0, & K \geq n \end{cases} = \sum_{k=0}^n v^{k+1} \mathbb{1}_{K=k}$$

Neto jednokratna premija, miza

$$\begin{aligned} A_{x:\overline{n}|}^1 &:= E[Z_n^q] \\ &= \sum_{k=0}^n v^{k+1} P(K = k) \\ &= \sum_{k=0}^n v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} \end{aligned}$$

Osiguranje života na n godina (ograničeno osiguranje)

Disperzija

$$\text{Var}[Z_n^q] = E[(Z_n^q)^2] - E[Z_n^q]^2$$

"Računski ekvivalentno" sa A_x zbog:

$$\begin{aligned} (Z_n^q)^2 &= \begin{cases} (v^{K+1})^2, & K < n \\ 0, & K \geq n \end{cases} \\ &= \begin{cases} (v^2)^{K+1}, & K < n \\ 0, & K \geq n \end{cases} \end{aligned}$$

Osiguranje doživljenja (na n godina)

Pure endowment

Vrijednost 1 se isplaćuje na kraju n godina
ako je osiguranik živ u tom trenutku

$$Z_n^p = \begin{cases} 0, & K < n \\ v^n, & K \geq n \end{cases} = \sum_{k=n}^{\infty} v^n \mathbb{1}_{K=k} = v^n \mathbb{1}_{K \geq n}$$

Neto jednokratna premija, miza

$$\begin{aligned} A_{x:\overline{n}|}^1 &:= E[Z_n^p] \\ &= E[v^n \mathbb{1}_{K \geq n}] \\ &= v^n P(K \geq n) \\ &= v^n {}_n p_x \end{aligned}$$

Osiguranje doživljenja (na n godina)

Disperzija

$$\text{Var}[Z_n^p] = E[(Z_n^p)^2] - E[Z_n^p]^2$$

▶ $Z_n^p = v^n \mathbb{1}_{K \geq n}$,

▶ $\mathbb{1}_{K \geq n} \sim \mathcal{B}(n p_x)$

$$\begin{aligned}\text{Var}[Z_n^p] &= (v^n)^2 \text{Var}[\mathbb{1}_{K \geq n}] \\ &= v^{2n} n p_x (1 - n p_x) \\ &= v^{2n} n p_x q_x\end{aligned}$$

Mješovito osiguranje (na n godina)

Endowment

Vrijednost 1 se isplaćuje na kraju godine smrti ako osiguranik umre u toku prvih n godina; u protivnom na kraju n -te godine.

$$\begin{aligned} Z_n &= \begin{cases} v^{K+1}, & K < n \\ v^n, & K \geq n \end{cases} \\ &= Z_n^q + Z_n^p \end{aligned}$$

Neto jednokratna premija, miza

$$\begin{aligned} A_{x:\overline{n}|} &:= E[Z_n] = E[Z_n^q + Z_n^p] \\ &= A_{x:\overline{n}|}^1 + A_{x:\overline{n}|}^{\overline{1}} \end{aligned}$$

Mješovito osiguranje (na n godina)

Disperzija

$$\text{Var}[Z] = E[(Z_n^q)^2] + E[(Z_n^p)^2] + 2\text{Cov}[Z_n^q Z_n^p]$$

- ▶ $\text{Cov}[Z_n^q Z_n^p] = E[Z_n^q Z_n^p] - E[Z_n^q]E[Z_n^p]$
- ▶ $Z_n^q Z_n^p = 0$ Zašto?
- ▶ $\text{Cov}[Z_n^q Z_n^p] = -A_{x:\overline{n}|}^1 A_{x:\overline{n}|}$

$$\text{Var}[Z] = E[(Z_n^q)^2] + E[(Z_n^p)^2] - 2A_{x:\overline{n}|}^1 A_{x:\overline{n}|}$$

Odloženo osiguranje života (za m godina)

Vrijednost 1 se isplaćuje na kraju godine smrti samo ako osiguranik ne umre u toku prvih m godina.

$$Z_{m,\infty}^q = \begin{cases} 0, & K < m \\ v^{K+1}, & K \geq m \end{cases} = \sum_{k=m}^{\infty} v^{k+1} \mathbb{1}_{K=k}$$

Neto jednokratna premija, miza

$$\begin{aligned} {}_m|A_x &:= E[Z_{m,\infty}^q] \\ &= \sum_{k=m}^{\infty} v^{k+1} P(K = k) \\ &= \sum_{k=m}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} \end{aligned}$$

A_{x+m}

$$Z_{\infty}^q = v^{K+1}$$

Po uzoru na ${}_t p_{x+m}$ i ${}_t q_{x+m}$ definišemo:

$$A_{x+m} = E[Z_{\infty}^q \mid K \geq m]$$

Očekivanje uslovljeno događajem?

Izlet u uslovna očekivanja i vjerovatnoće

- ▶ (Ω, \mathcal{A}, P) – vjerovatnostni prostor
- ▶ $C \in \mathcal{A}$ događaj, $P(C) \neq 0$
- ▶ $A \in \mathcal{A}$ događaj
- ▶ Uslovna vjerovatnoća: $P(A | C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)}$
- ▶ Ako je $A \cap C = \emptyset$ onda je $P(A | C) = 0$
- ▶ $P|_C : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ – uslovna mjera: $P|_C(A) = P(A | C)$
- ▶ $P|_C$ je vjerovatnosna mjera

Izlet u uslovna očekivanja i vjerovatnoće

- ▶ X – s.v.
- ▶ $E[X] = \int X dP$
- ▶ $E[X | C] = \int X dP|_C = \int_C X dP|_C$
- ▶ Ako je $A \subset C$ i $X = \mathbb{1}_A$ onda je:

$$\begin{aligned} E[\mathbb{1}_A | C] &= \int_C \mathbb{1}_A dP|_C \\ &= \int_A dP|_C = P(A | C) = \frac{P(A)}{P(C)} = \frac{E[\mathbb{1}_A \mathbb{1}_C]}{P(C)} \end{aligned}$$

Izlet u uslovna očekivanja i vjerovatnoće

- ▶ Ako je $X = \mathbb{1}_A$ ond je $E[X | C] = \frac{E[X\mathbb{1}_C]}{P(C)}$
- ▶ Ako je $X \neq \mathbb{1}_A$ možemo aproksimirati $X = \sum x_i \mathbb{1}_{A_i}$
- ▶ Svakako važi $E[X | C] = \frac{E[X\mathbb{1}_C]}{P(C)}$

Izlet u uslovna očekivanja i vjerovatnoće

Konstruktivna definicija

- ▶ $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ – pod- σ -algebra
- ▶ $E[X | \mathcal{B}]$ je s.v. i to:
 - ▶ \mathcal{B} mjerljiva s.v.
 - ▶ $\int_B E[X | \mathcal{B}] dP = \int_B X dP$ za svako $B \in \mathcal{B}$

Slučajno očekivanje u odnosu na s.v.

- ▶ Y – s.v.
- ▶ $\sigma(Y)$ – σ algebra generisana s.v. Y (originalni skupova)
- ▶ $E[X | Y] := E[X | \sigma(Y)]$

Izlet u uslovna očekivanja i vjerovatnoće

Uslovno očekivanje

- ▶ Značenje uslovnog očekivanja?
- ▶ Kakve veze ima sa uslovnom vjerovatnoćom?
- ▶ Kakve veze ima sa očekivanje uslovljenim događajem?